Clasa a IX-a

Problema 1

Fie $a, b \in [0, \infty)$. Să se arate că $\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2$.

Costică Ambrinoc, Rm Sărat.

Soluție

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3+b^3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^3 \leq 2(a^3+b^3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6 \leq 2a^6+4a^3b^3+2b^6$$

$$\Leftrightarrow a^6-3a^4b^2+4a^3b^3-3a^2b^4+b^6 \geq 0 \quad \text{1 punct}$$

Pentru $a=0$ sau $b=0$ inegalitatea este adevărată.

Pentru $a \neq 0$ și $b \neq 0$ împărțim cu a^3b^3 și avem:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4 \geq 0 \quad \text{1 punct}$$

Notăm $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = t \geq 2$ 1 punct

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3} = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-1\right) = t(t^2-3) \quad \text{1 punct}$$

Trebuie să arătăm că

$$t^3-3t-3t+4 \geq 0 \Leftrightarrow t^3-6t+4 \geq 0 \quad \text{1 punct}$$

$$\Leftrightarrow t^3-4t-2t+4 \geq 0 \Leftrightarrow t(t-2)(t+2)-2(t-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+2t-2) \geq 0 \quad \text{1 punct}$$

adevărată deoarece $t = \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$

și $t^2+2t \geq 2$ 1 punct